Calcul avec l'addition des vitesses en théorie de la relativité

Dans tout le problème, on note I l'intervalle $]-1,1[$

Partie I :Structure de groupe sur I

1. Dans cette question, on va définir la structure de groupe que nous allons étudier par la suite.

1.a Montrer que $\forall s,t \in I$, $1+st \neq 0$.

On pose, pour tout s et t de I, $s*t = \dfrac{s+t}{1+st}$.

1.b Soit $s \in I$ fixé. Etudier la fonction $t \mapsto s*t$.
En déduire que la loi $*$ est interne.

1.c Montrer que $(I,*)$ est un groupe abélien.

1.d Soit x un réel strictement positif. On forme $H_x = \left\{ \dfrac{x^n-1}{x^n+1} \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Montrer que H_x est un sous-groupe de $(I,*)$.

2. Soit $s \in I$ autre que 0. Dans cette question, on désire expliciter $s^{*n} = s*s*\ldots*s$ (n termes)

2.a Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, s^{*n} peut s'écrire $\dfrac{p_n}{q_n}$ avec les suites (p_n) et (q_n) déterminées par

$\begin{cases} p_0 = 0 \\ q_0 = 1 \end{cases}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} p_{n+1} = p_n + sq_n \\ q_{n+1} = sp_n + q_n \end{cases}$.

2.b Exprimer q_{n+1} en fonction de p_{n+1} et p_n
puis exprimer p_{n+2} en fonction de p_{n+1} et p_n.

2.c En déduire l'expression générale de p_n puis celle de q_n.

2.d Exprimer s^{*n}.
On observe que cette formule vaut aussi pour $s = 0$.

3. Soit $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

3.a Etudier la parité, la monotonie et les branches infinies de g.

3.b Donner l'allure du graphe de g.

3.c Montrer que g est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(I,*)$.

Partie II – Etude d'automorphismes de $(I,*)$

On note $(Aut(I),\circ)$ le groupe des automorphismes de $(I,*)$.

On notera h l'isomorphisme réciproque de g. On ne cherchera pas à exprimer h pour l'instant.

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on introduit $f_a:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_a(x) = ax$.
On définit ensuite φ_a par $\varphi_a = g \circ f_a \circ h$.

1.a Montrer que φ_a est un automorphisme de $(I,*)$.

1.b Soit $\Phi:\mathbb{R}^* \to Aut(I)$ définie par $\Phi(a) = \varphi_a$.
Montrer que Φ est un morphisme de groupes.

1.c En déduire que $\mathcal{H} = \{\varphi_a \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*\}$ est un sous-groupe de $(Aut(I),\circ)$.

2. On désire ici exprimer φ_a.

2.a Montrer que $h(t) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+t}{1-t}$ pour tout $t \in I$.

2.b Etablir que $\varphi_a(t) = \dfrac{(1+t)^a-(1-t)^a}{(1+t)^a+(1-t)^a}$.

2.c Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in I$.
En exploitant que $n.x = x + x + \ldots + x$ (n termes), retrouver l'expression de s^{*n} obtenue dans la partie I